Lektion 10: Anwendung der Differentialrechung

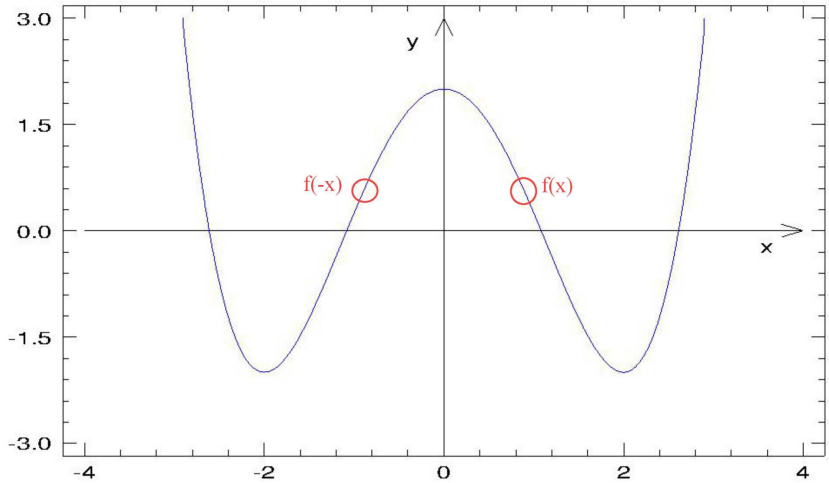
10.1 Die vollständige Funktionsuntersuchung

In Lektion 9 haben wir gelernt, was die Ableitung einer Funktion ist und wie wir die Differentialrechnung einsetzen können, um Extrem-, Sattel- und Wendepunkte einer Funktion zu berechnen. Gemeinsam mit den Nullstellen (vgl. Lektion 8) haben wir dann bereits einige wichtige Daten der Funktion ermittelt, die uns befähigen sollten, letztlich den Funktionsgraphen zeichnen zu können.
Doch wie bereits Eingangs zur Lektion 9 erwähnt gibt es noch einige weitere nützliche Aspekte, die sich zu untersuchen lohnen: die Symmetrie, das Verhalten für „x gegen plus oder minus Unendlich“ und Grenzwertbetrachtungen bzw. asymptotisches Verhalten der Funktion.

1) Symmetrie

Unter einer Symmetrie verstehen wir die Eigenschaft, ein Objekt um einen Punkt oder eine Achse zu drehen (Drehsymmetrie), an einer Achse zu spiegeln (Achsensymmetrie) bzw. an einem Punkt zu spiegeln (Punktsymmetrie), wodurch das Objekt wieder in sich selbst abgebildet wird.
Aus der Definition der Funktion geht unmittelbar hervor, dass es keine Drehsymmetrie geben kann, da dadurch die Eindeutigkeit der Zuordnung verletzt werden würde. Aus dem gleichen Grund kann eine Achsensymmetrie einer Funktion nur zu einer Achse existieren, die parallel zur y-Achse ist. Eine zur x-Achse parallele Spiegelachse hingegen würde zu einer Abbildung führen, die jedem x-Wert des Definitionsbereiches zwei y-Werte zuordnet und damit dem Funktionsbegriff widerspricht. Ob es andere Spiegelachsen geben kann bzw. andere Spiegelpunkte als den Koordinatenursprung, ist schwierig zu untersuchen. Speziell überprüfen wir daher bei der Funktionsuntersuchung lediglich, ob die Funktion zur y-Achse symmetrisch ist bzw. zum Koordinatenursprung. Weiterführende Symmetriebestimmungen lohnen insbesondere daher nicht, dass durch sie keine Vereinfachung der Funktionsuntersuchung gegeben wäre, während wir bei den beiden genannten Symmetriearten den Vorteil haben, uns bei der späteren Untersuchung auf die besonderen Punkte der Funktion auf eine Seite der y-Achse beschränken zu können; wissen wir über die Symmetrie Bescheid, können wir unmittelbar auf die besonderen Punkte auf der anderen Seite der y-Achse schließen.

1.a) y-Achsensymmetrie:



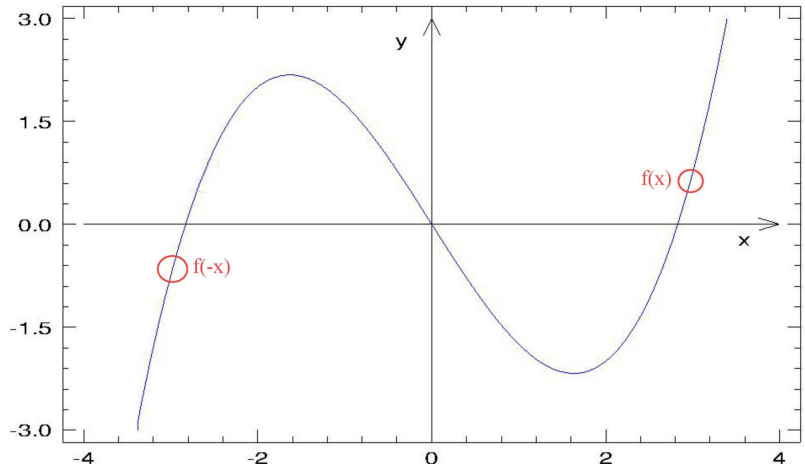
Wir erkennen: liegt eine y-Achsensymmetrie vor, gilt für alle x-Werte:
$f(-x) = f(x)$.
Diese Bedingung lässt sich durch einfaches Ausrechnen überprüfen.
Bsp.: $f(x) = 2x^4 + x^2 - 1$
$f(-x) = 2(-x)^4 + (-x)^2 - 1$
$= 2x^4 + x^2 - 1$
$= f(x)$

Im Beispiel rechts neben der Abbildung wurde die Symmetriebedingung rechnerisch bei einer **ganzrationalen Funktion** bestätigt. Gerade dieser Fall lässt sich vereinfachen, es gilt:

© Dieter Eiermann 2017-2021

Eine ganzrationale Funktion ist genau dann y-Achsensymmetrisch, wenn ihr Funktionsterm lediglich aus geraden x-Potenzen besteht.

1.b) Ursprungssymmetrie:



Wir erkennen: liegt eine Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung vor, so gilt für alle x-Werte:
-f(-x) = f(x).
Auch diese Bedingung kann einfach rechnerisch überprüft werden, Bsp.:
$f(x) = 3x^5 - x^3 + 2x$
$f(-x) = 3(-x)^5 - (-x)^3 + 2(-x)$
$= -3x^5 + x^3 - 2x$
$-f(-x) = -(-3x^5 + x^3 - 2x)$
$= 3x^5 - x^3 + 2x = f(x)$

Anhand dieses Beispiels lässt sich diese Vereinfachung erkennen:
Eine ganzrationale Funktion ist genau dann punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn ihr Funktionsterm lediglich aus ungeraden x-Potenzen besteht. Außerdem darf es kein absolutes Glied geben.

Allerdings gilt weiterhin: Enthält der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion nur ungerade x-Potenzen und außerdem das Absolutglied a, so ist die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt (0/a).

<u>Für alle nicht-ganzrationalen Funktionen muss die Symmetrie rechnerisch wie in den beiden Beispielen bestätigt werden!</u>

<u>2) Verhalten von f(x) für x „gegen“ + oder – Unendlich</u>

Bei dieser Untersuchung geht es um die Beurteilung, woher der Funktionsgraph (von links) kommt und wohin er (nach rechts) geht. Außerdem ist die Frage zu beantworten, ob es vereinfachende „Linien“ gibt, die sogenannten *Asymptoten*, denen sich der Graph „im Unendlichen“ annähert. Auf diese Untersuchungen wird jedoch bei den speziellen Funktionen näher eingegangen; hier beschränken wir uns zunächst wieder auf die Betrachtung der ganzrationalen Funktion. Allgemein gilt:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Klammern wir die höchste x-Potenz samt ihrem Vorfaktor aus, erhalten wir:

$$f(x)=a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n x^n}+\ldots+\frac{a_1 x}{a_n x^n}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)=a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right).$$

Wir erkennen leicht, dass für $x \to \pm\infty$ im gesamten Term hinter der 1 in der Klammer jeweils eine endliche Zahl a_i durch Unendlich geteilt wird. Daher geht dieser gesamte Teil in der Klammer gegen 0. Das bedeutet: für $x \to \pm\infty$ gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n \bullet 1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n\right).$$ Anders ausgedrückt: Soll bei einer ganzrationalen Funktion das Verhalten für $x \to \pm\infty$ untersucht werden, genügt es, das Verhalten der

höchsten x-Potenz samt ihrem Vorfaktor zu betrachten, der übrige Funktionsterm ist vernachlässigbar.

Beispiel: $f(x) = -5x^5 + 12x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 4x + 6$

Für $x \to -\infty$ gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-5x^5\right) \to +\infty$,

für $x \to +\infty$ gilt: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^5\right) \to -\infty$.

Dabei ist in der Schreibweise zu beachten, dass es sich bei "∞" nicht um einen regulären Grenzwert im eigentlichen Sinne handelt, es darf daher auch kein Gleichheitszeichen verwendet werden. In Worten bedeutet die Schreibweise, dass f(x) für „x gegen Minus Unendlich gegen Plus Unendlich geht/strebt“ und für „x gegen Plus Unendlich gegen Minus Unendlich“.

Leicht ist zu erkennen, dass für obige Aussage lediglich das Vorzeichen ermittelt werden muss, das erhalten wird, wenn in die höchste x-Potenz der ganzrationalen Funktion (samt ihrem Vorfaktor) negative bzw. positive Zahlen eingesetzt werden. Hierfür muss nichts berechnet werden.

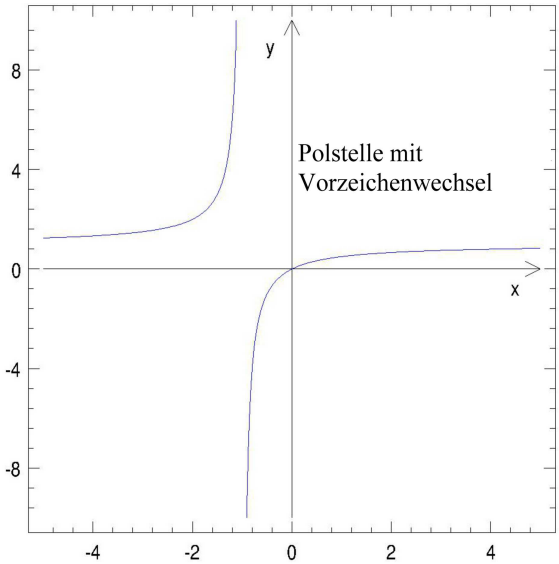
3) Grenzwertuntersuchungen: asymptotisches Verhalten von Funktionen

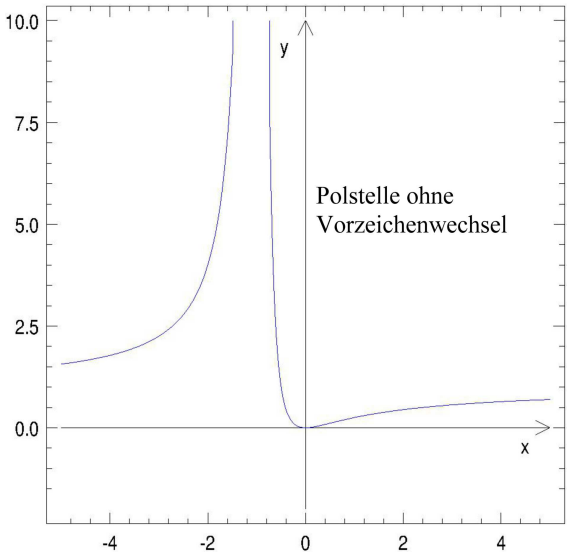
Grenzwertuntersuchungen werden erst bei nicht-ganzrationalen Funktionen notwendig, bei ganzrationalen Funktionen gibt es keine Asymptoten, sondern die entsprechenden Berechnungen beschränken sich auf die unter 2) beschriebenen Betrachtungen zum Unendlichkeitsverhalten.

3.1 Asymptotisches Verhalten gebrochen rationaler Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen der Art $f(x) = \dfrac{z(x)}{n(x)}$ sind nicht definiert, wenn das Nennerpolynom n(x) Null wird. Dieser Aspekt wurde bereits in Lektion 8 unter dem Punkt 2.1) behandelt. Wie wir dort gelernt haben, gibt es genau dann eine **senkrechte Asymptote x = a**, wenn f(x) an der Stelle x = a eine Polstelle hat, wenn also gilt: $n(a) = 0 \wedge z(a) \neq 0$.

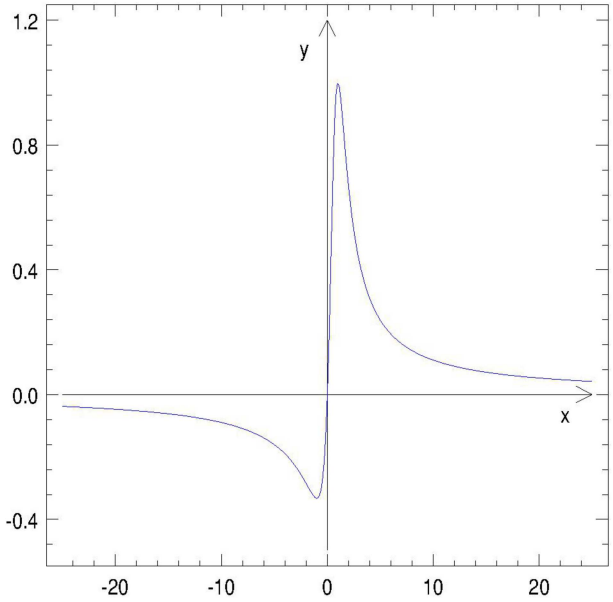
Haben wir eine solche senkrechte Asymptote ermittelt, können wir weiter untersuchen, auf welche Weise sich f(x) jeweils „von links“ $\left(\text{also für } x \underset{x<a}{\to} a\right)$ bzw. „von rechts“ $\left(\text{also für } x \underset{x>a}{\to} a\right)$ dieser Asymptote annähert. Es gibt **Polstellen mit und ohne Vorzeichenwechsel**. Mit Vorzeichenwechsel kann z.B. bedeuten, dass f(x) bei Annäherung von links gegen a „gegen Minus Unendlich geht“, bei Annäherung von rechts gegen a hingegen „gegen Plus Unendlich“. Bei Polstellen ohne Vorzeichenwechsel verhält sich f(x) in beiden Richtungen gleich. Beispiele:





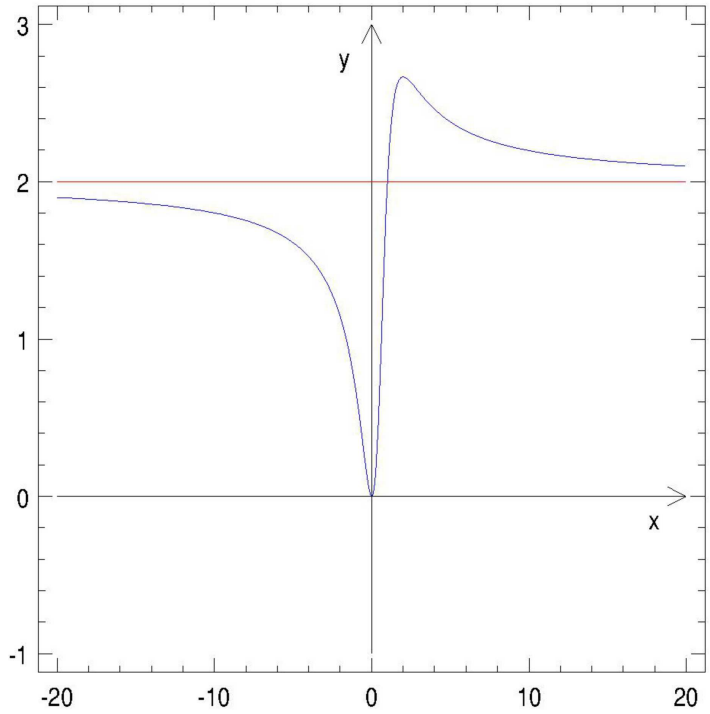
Neben den senkrechten Asymptoten an den Polstellen nähern sich gebrochen rationale Funktionen auch immer für $x \to \pm\infty$ einer Asymptote. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

A. Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der des Nennerpolynoms:



In diesem Fall ist die x-Achse Asymptote. Ein Beispiel wäre die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$, ihr Graph ist in der linken Abbildung zu sehen.
Auch interessant zu erkennen und durchaus untersuchenswert: Nähert sich der Graph von unten oder von oben der Asymptote? Hier sehen wir in beiden Unendlichkeitsrichtungen unterschiedliches Verhalten.

B. Grad des Zähler- und Nennerpolynoms sind gleich:



Das nebenstehende Beispiel zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - x + 1}$ und seiner Asymptote a(x) = 2. Leicht kann erkannt werden, dass zur Berechnung der Asymptote lediglich die höchste x-Potenz des Zählers durch die höchste x-Potenz des Nenners geteilt werden muss.

C. Der Grad des Zählerpolynoms ist größer als der des Nennerpolynoms:

Dieser Fall erfordert zur Bestimmung der Asymptote eine **Polynomdivision**, wie sie in Lektion 8 bei der Nullstellenbestimmung beschrieben wird. Wir erhalten eine ganzrationale Funktion, die Asymptote, und einen Rest, bei dem der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist

© Dieter Eiermann 2017-2021

als der des Nennerpolynoms, also der dem Fall A entspricht und für $x \to \pm\infty$ vernachlässigt werden kann, da der Grenzwert 0 ist. Beispiel:

$f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 8x + 2}{4x^2 - 2x - 6}$. Wir führen die Polynomdivision (Zähler : Nenner) durch:

$(2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 8x + 2) : (4x^2 - 2x - 6) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3{,}5x + 6{,}5}{4x^2 - 2x - 6}$

$-(2x^4 - x^3 - 3x^2)$

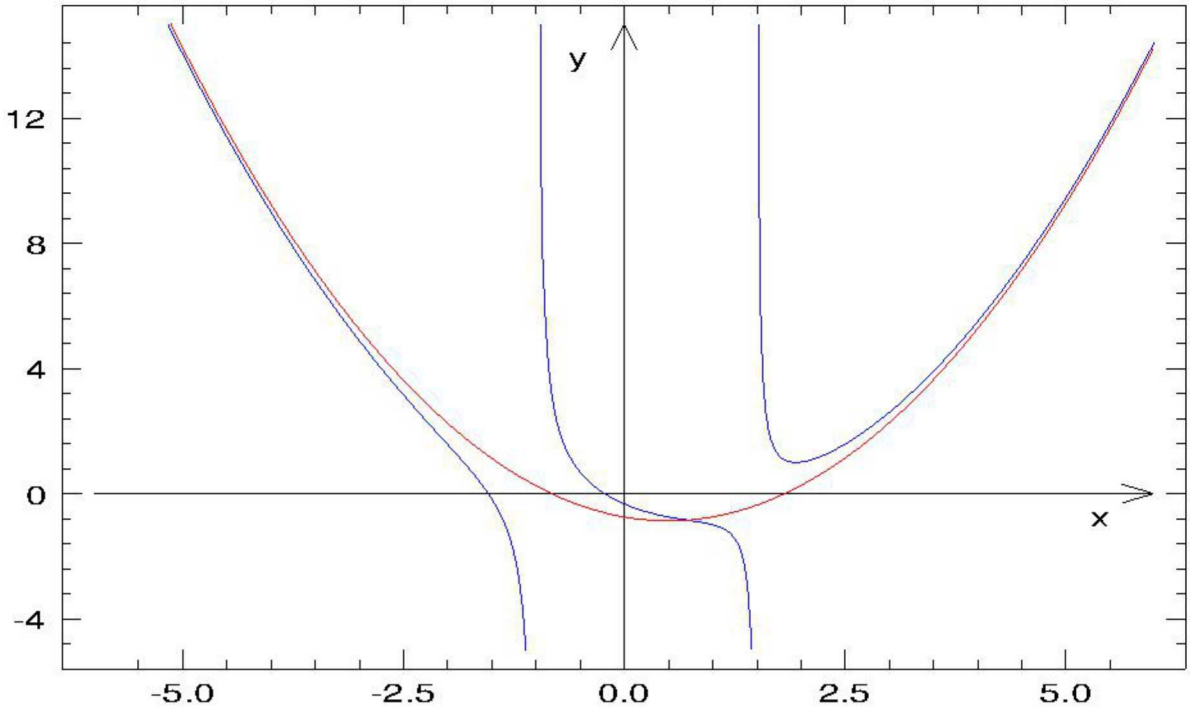
$-2x^3 - 2x^2 + 8x + 2$
$-(-2x^3 + x^2 + 3x)$

$-3x^2 + 5x + 2$
$-(3x^2 + 1{,}5x - 4{,}5)$

$3{,}5x + 6{,}5$

Damit ist die Asymptote $a(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - \dfrac{3}{4}$, d.h. für $x \to \pm\infty$ nähert sich f(x) „unendlich dicht“ der Funktion a(x) an. Diese ist bedeutend einfacher zu untersuchen und zu berechnen als f(x), der Vorteil der Asymptote ist demnach für betragsmäßig große x-Werte eine leichtere Abschätzung, in welcher Größenordnung sich die Funktionswerte von f(x) bewegen.

Die folgende Abbildung zeigt die oben untersuchte Funktion f(x) (blau) und ihre Asymptote a(x) (rot):



3.2 Asymptotisches Verhalten der Exponentialfunktion

Exponentialfunktionen heißen alle Funktionen in der Art $f(x) = c \bullet a^x$. Dabei ist c der „Anfangs- oder Startwert“ der Exponentialfunktion, der für x = 0 gilt (im Sachzusammenhang bedeutet x = 0 normalerweise den Beobachtungsbeginn für das exponentielle Wachstum, wodurch „Start“ erklärt ist), a ist der Wachstumsfaktor, der sich bei einem Wachstum aus der Wachstumsrate r % durch $a = 1 + \frac{r}{100}$, bei einer Minderung durch $a = 1 - \frac{r}{100}$ errechnet. Die Funktionsvariable x bedeutet bei einer solchen exponentiellen Wachstumsfunktion im Sachzusammenhang meistens die Zeiteinheiten, unter denen das Wachstum beobachtet wird.

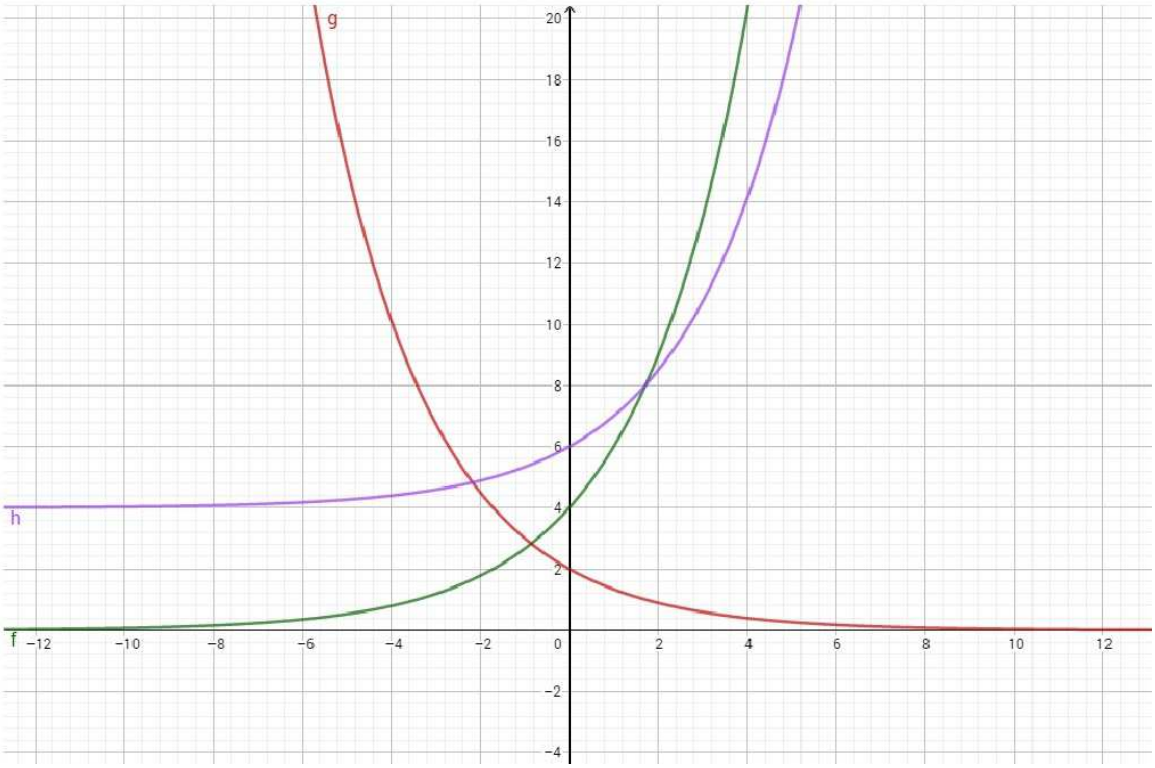
Die Exponentialfunktion macht nur Sinn, wenn der Wachstumsfaktor ungleich Null ist. Das bedeutet automatisch, dass f(x) niemals Null werden kann. Sollte für bestimmte Werte von x jedoch der Exponent negativ werden, so gilt nach den Regeln der Potenzrechnung (vgl. Lektion 3), dass in diesem Moment eine Division erfolgt: $f(x) = c \bullet a^x$ wird für negative x zu $f(x) = c \bullet \frac{1}{a^{|x|}}$, wobei demnach der Exponent positiv wird.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

Falls der Wachstumsfaktor a zwischen 0 und 1 liegt, wird die Potenz mit wachsendem **positiven** x immer kleiner, d.h. es gilt: „für x gegen Unendlich geht f(x) gegen Null“, bei einem Wachstumsfaktor größer als 1 hingegen ist die Situation genau umgekehrt: dann tritt der oben geschilderte Fall bei **negativem x** ein, es erfolgt eine Division und mit wachsendem negativen x wird die Potenz immer kleiner: „für x gegen Minus Unendlich geht f(x) gegen Null“.

In beiden Fällen nähert sich die Funktion der x-Achse an, d.h. die x-Achse ist Asymptote. Wird zur Exponentialfunktion noch ein konstanter Wert addiert, bedeutet das die bereits bekannte Verschiebung in y-Richtung, wir erhalten eine zur x-Achse parallele Asymptote. Die folgende Grafik zeigt die drei Varianten:

$f(x) = 4 \bullet 1{,}5^x$ (grün), $g(x) = 2 \bullet 1{,}5^{-x}$ (rot) und $h(x) = 2 \bullet 1{,}5^x + 4$ (violett):

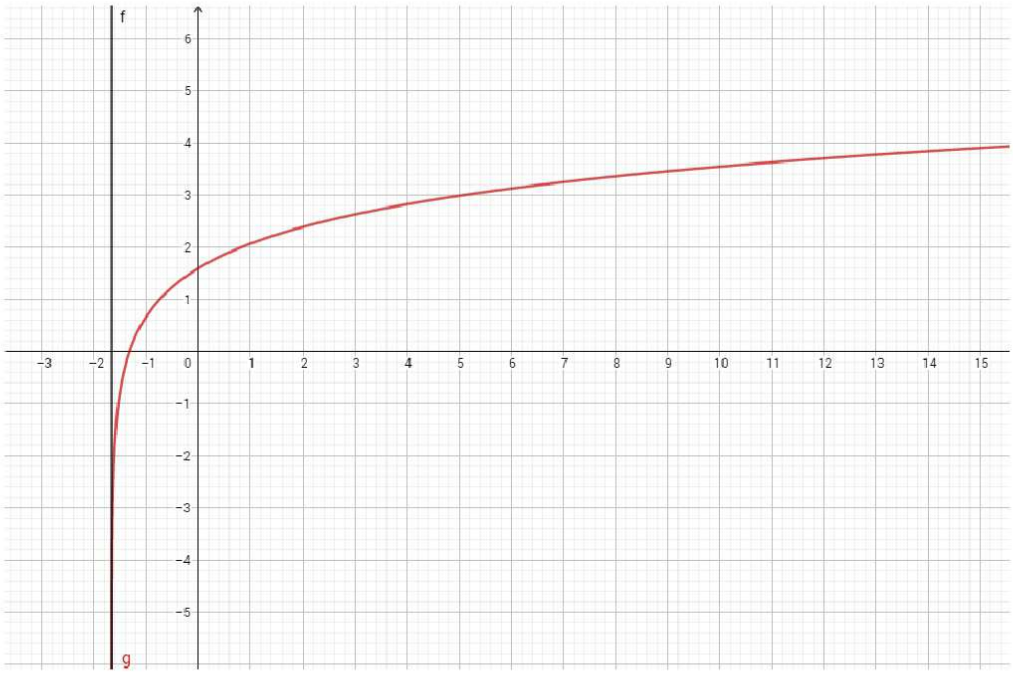


Wir erkennen bei f(x) und g(x), wie der Funktionsgraph bei x = 0 die y-Achse im Startwert schneidet; bei h(x) kommt hingegen noch die Konstante dazu, typisch für ein beschränktes Wachstum, hier mit der unteren Schranke 4.

3.3 Asymptotisches Verhalten der Logarithmusfunktion

Bei diesem Funktionstyp liegt das asymptotische Verhalten in der Einschränkung des Definitionsbereiches begründet. So ist der Logarithmus weder für negative Zahlen noch für die 0 definiert, woraus folgt, dass für diese Funktionen berechnet werden muss, wann der „Inhalt“ der Funktion größer oder gleich bzw. größer 0 wird. An dieser Stelle nähert sich die betreffende Funktion einer senkrechten Asymptote.

Bsp.: f(x) = ln(3x + 5) wird für Zahlen kleiner oder gleich $-\frac{5}{3}$ Null oder negativ und ist nicht definiert, für alle x größer $-\frac{5}{3}$ hingegen schon. Als Graph ergibt sich für „x geht unendlich dicht gegen $-\frac{5}{3}$“ folgendes Bild:

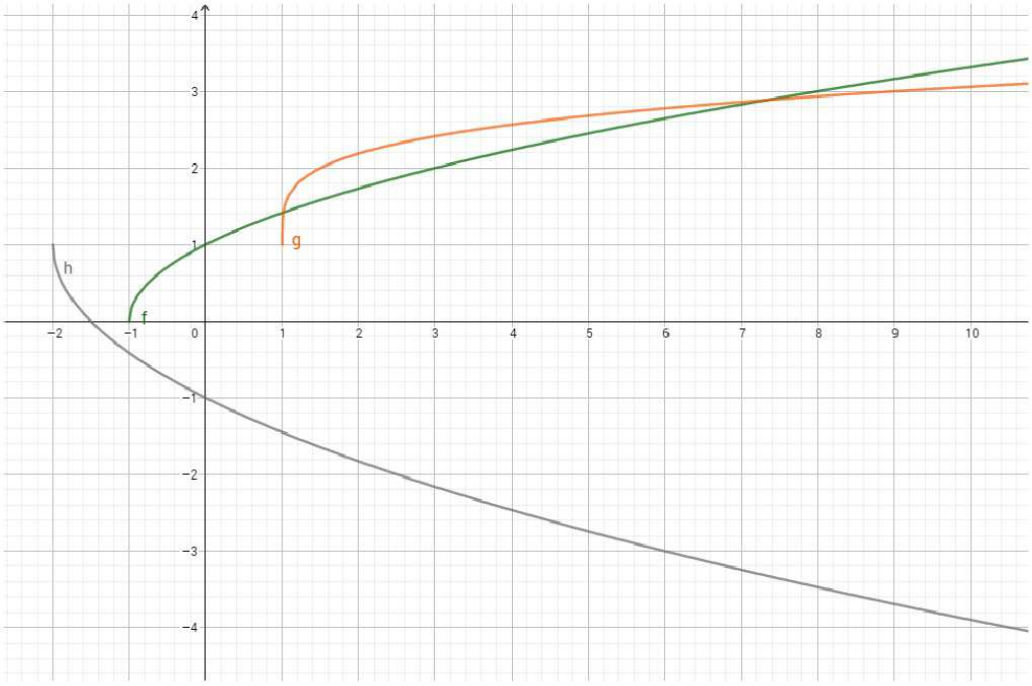


3.4 Besonderheit bei geraden Wurzelfunktionen

Ähnlich wie die Logarithmusfunktion sind gerade Wurzelfunktionen für negative Radikanden im Reellen nicht definiert, jedoch noch für die 0. Da jede Wurzel aus 0 ebenfalls 0 ist, endet bzw. beginnt an genau der Stelle, an der der Radikand der geraden Wurzel 0 wird, die Wurzelfunktion; das ist streng genommen kein asymptotisches Verhalten, da die Funktion sich diesem Punkt ja nicht „unendlich dicht" annähert, sondern ihn erreicht.
Die folgende Abbildung zeigt drei Wurzelfunktionen mit ihren Startpunkten:

© Dieter Eiermann 2017-2021

$f(x)=\sqrt{x+1}$ mit Startpunkt (-1/0), $g(x)=\sqrt[4]{2x-2}+1$ mit Startpunkt (1/1) und $h(x)=-2\sqrt{0,5x+1}+1$ mit Startpunkt (-2/1).



4) Berechnung der Nullstellen von Funktionen

Die Vorgehensweisen für die Berechnung der Nullstellen unterschiedlicher Funktionstypen wurde ausführlich in Lektion 8 besprochen.

5) Berechnung der Ableitungen von Funktionen

Die Bedeutung der Ableitungen von Funktionen, ihre Anwendung in der Extrem- und Wendestellenberechnung und die diversen Ableitungetechniken finden wir in Lektion 9.

6) Berechnung der Extrempunkte von Funktionen

Mit ausführlichen Erläuterungen ebenfalls zu finden in Lektion 9.

7) Berechnung der Wendepunkte von Funktionen

Vergleiche auch hierzu Lektion 9.

8) Tangentenberechnung

Manchmal kann es interessant sein, bestimmte Tangenten an Funktionsgraphen zu bestimmen und diese später auch in die Funktionsskizze mit aufzunehmen. Insbesondere die **Wendetangenten** werden gerne skizziert, also die Tangenten an bzw. durch die Wendepunkte der Funktionen. Die Vorgehensweise ist bei allen Funktionstypen stets die gleiche: zunächst benötigen wir den Berührpunkt $B(x_B/f(x_B))$, also zum Beispiel einen Wendepunkt $W(x_W/f(x_W))$. Als nächstes berechnen wir die Steigung der Tangente, diese entspricht der

© Dieter Eiermann 2017-2021

Steigung der Funktion im Berührpunkt, kann also über den Wert der ersten Ableitung ermittelt werden: $m_{Tan} = f'(x_B)$. Die Koordinaten des Berührpunktes zusammen mit der Steigung eingesetzt in die allgemeine Funktionsgleichun y = mx + b wird zur abschließenden Berechnung von b genutzt – fertig.

10.2 Vollständige Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Die beschriebene Vorgehensweise einer Funktionsuntersuchung soll nun zunächst an einer einfachen ganzrationalen Funktion durchgeführt werden, auf geht es also zur „Kurvendiskussion"!

Beispiel: $f(x) = 0{,}75\,x^3 - 4{,}5\,x^2 + 6x$.

1) Symmetrie: f(x) besteht als ganzrationale Funktion sowohl aus geraden als auch ungeraden Potenzen der Funktionsvariable, daher liegt keine bestimmbare Symmetrie vor.

2) Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$: Betrachte die höchste x-Potenz samt Vorfaktor, also $0{,}75\,x^3$: für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$.
Wie in 10.1 2) beschrieben muss hierzu lediglich überlegt werden, welches Vorzeichen das Ergebnis erhält, wenn eine negative bzw. positive Zahl in $0{,}75\,x^3$ eingesetzt wird.

3) Nullstellen: $0{,}75\,x^3 - 4{,}5\,x^2 + 6\,x = 0 \iff x\,(0{,}75\,x^2 - 4{,}5\,x + 6) = 0$

$$\iff x_1 = 0 \;\vee\; 0{,}75\,x^2 - 4{,}5\,x + 6 = 0 \;/\; : 0{,}75$$
$$\iff x_1 = 0 \;\vee\; x^2 - 6\,x + 8 = 0 \;/\; p = -6 \;/\; q = 8$$
$$\iff x_1 = 0 \;\vee\; x_{2/3} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \pm 1$$
$$\iff x_1 = 0 \;\vee\; x_2 = 2 \;\vee\; x_3 = 4$$

=> **Schnitt<u>punkte</u> mit der x-Achse** (falls in der Aufgabe gefordert)**:**
$N_1(0/0)$, $N_2(2/0)$, $N_3(4/0)$.

4) Ableitungen: $f'(x) = 2{,}25\,x^2 - 9\,x + 6$
$f''(x) = 4{,}5\,x - 9$
$f'''(x) = 4{,}5$

5) Extrempunkte: notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0 \iff 2{,}25\,x^2 - 9\,x + 6 = 0 \;/\; : 2{,}25$

$$\iff x^2 - 4\,x + \frac{8}{3} \;/\; p = -4 \;/\; q = \frac{8}{3}$$
$$\iff x_{E_{1/2}} = 2 \pm \sqrt{2^2 - \frac{8}{3}} = 2 \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\iff x_{E_1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \;\vee\; x_{E_2} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

hinreichende Bedingung: $f'(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}) = 0$ und $f''(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}) < 0$ => HP

$f'(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}) = 0$ und $f''(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}) > 0$ => TP

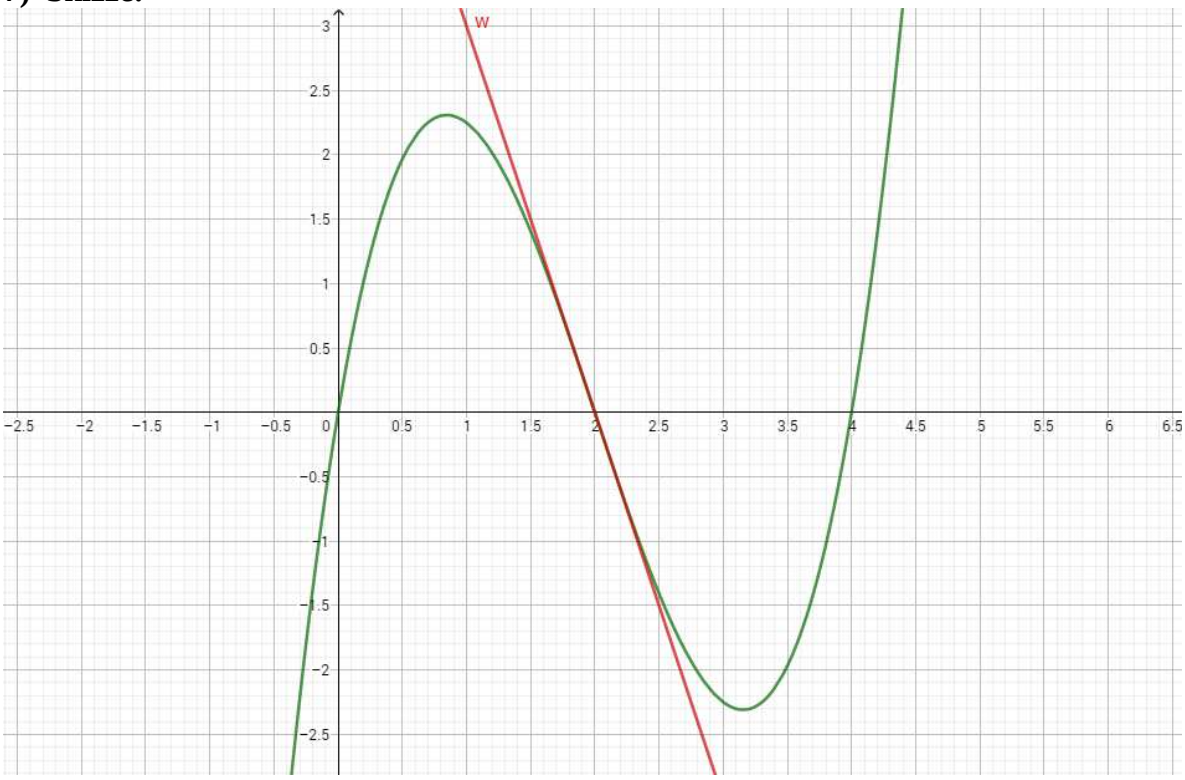
y-Koordinaten: $f(2-\frac{2}{\sqrt{3}}) \approx 2{,}31$ => $HP(2-\frac{2}{\sqrt{3}}/2{,}31)$

$f(2+\frac{2}{\sqrt{3}}) \approx -2{,}31$ => $TP(2+\frac{2}{\sqrt{3}}/-2{,}31)$

6) Wendepunkt: notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0$ <=> $4{,}5x - 9 = 0$ <=> $x_w = 2$.
hinreichende Bedingung: $f''(2) = 0$ und $f'''(2) = 4{,}5 \neq 0$ => WP
y-Koordinate: $f(2) = 0$ => WP(2/0)

6.1) Wendetangente: $t_w(x) = mx + b$, $m = f'(x_w) = f'(2) = -3$, zusammen mit WP(2/0)
eingesetzt: $0 = -3 \bullet 2 + b$ <=> $6 = b$
=> $t_w(x) = -3x + 6$.

7) Skizze:



10.3 Vollständige Untersuchung einer gebrochen rationalen Funktion

Wie unter 3.1) geschildert gibt es bei einer gebrochen rationalen Funktion die Besonderheiten des asymptotischen Verhaltens sowohl an Polstellen als auch im Unendlichen.

Beispiel: $f(x) = \frac{2x^2-8}{5x-15}$

1) Symmetrie: $f(-x) = \frac{2(-x)^2-8}{5(-x)-15} = \frac{2x^2-8}{-5x-15} \neq f(x)$ => keine y-Achsensymmetrie

$-f(-x) = -\frac{2x^2-8}{-5x-15} = \frac{2x^2-8}{5x+15} \neq f(x)$ => keine Ursprungssymmetrie

© Dieter Eiermann 2017-2021

2) Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$: Der Grad des Zählerpolynoms ist größer als der Grad des Nennerpolynoms, daher gibt es eine funktionale Asymptote, die wir durch die Polynomdivision herausfinden:

$(2x^2 - 8) : (5x - 15) = 0{,}4x + 1{,}2 + \dfrac{10}{5x-15}$.

$-(2x^2 - 6x)$

$6x - 8$
$-(6x - 18)$

10

Die funktionale Asymptote ist die lineare Funktion: g(x) = 0,4 x + 1,2.

3) Nullstellen und Definitionslücken:
Die Nullstellen von f(x) sind die Nullstellen des Zählerpolynoms:
$2x^2 - 8 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x_{1/2} = \pm 2$.

Die Definitionslücken entsprechen den Nullstellen des Nennerpolynoms:
$5x - 15 = 0 \iff x_p = 3$. Diese Definitionslücke ist nicht Nullstelle des Zählerpolynoms, daher handelt es sich um eine Polstelle mit senkrechter Asymptote.
Weiterhin gilt: $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\left(\dfrac{2x^2-8}{5x-15}\right) \to -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\left(\dfrac{2x^2-8}{5x-15}\right) \to +\infty$, die Polstelle hat also einen Vorzeichenwechsel.

4) Ableitungen: Im vorliegenden Fall besteht die Möglichkeit, die Quotientenregel anzuwenden oder die durch die Polynomdivision vereinfachte Funktion abzuleiten. Da die Quotientenregel recht umständlich ist, machen wir es anders:

$f(x) = \dfrac{2x^2-8}{5x-15} = 0{,}4x + 1{,}2 + \dfrac{10}{5x-15} = 0{,}4x + 1{,}2 + 10(5x - 15)^{-1}$
$f'(x) = 0{,}4 - 50(5x - 15)^{-2}$
$f''(x) = 500(5x - 15)^{-3}$
$f'''(x) = -7500(5x - 15)^{-4}$

5) Extrempunkte: notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0 \iff 0{,}4 - 50(5x - 15)^{-2} = 0$
$\iff 0{,}008 = (5x - 15)^{-2} \iff 0{,}008(5x - 15)^2 = 1$
$\iff (5x - 15)^2 = 125 \iff 5x - 15 = \pm 5\sqrt{5}$
$\iff x_{E1/2} = 3 \pm \sqrt{5}$

hinreichende Bedingung: $f'\left(3-\sqrt{5}\right) = 0$ und $f''\left(3-\sqrt{5}\right) = -\dfrac{500}{625\sqrt{5}} = -\dfrac{4}{5\sqrt{5}} < 0 \Rightarrow$ HP

$f'\left(3+\sqrt{5}\right) = 0$ und $f''\left(3+\sqrt{5}\right) = \dfrac{500}{625\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5\sqrt{5}} > 0 \Rightarrow$ TP

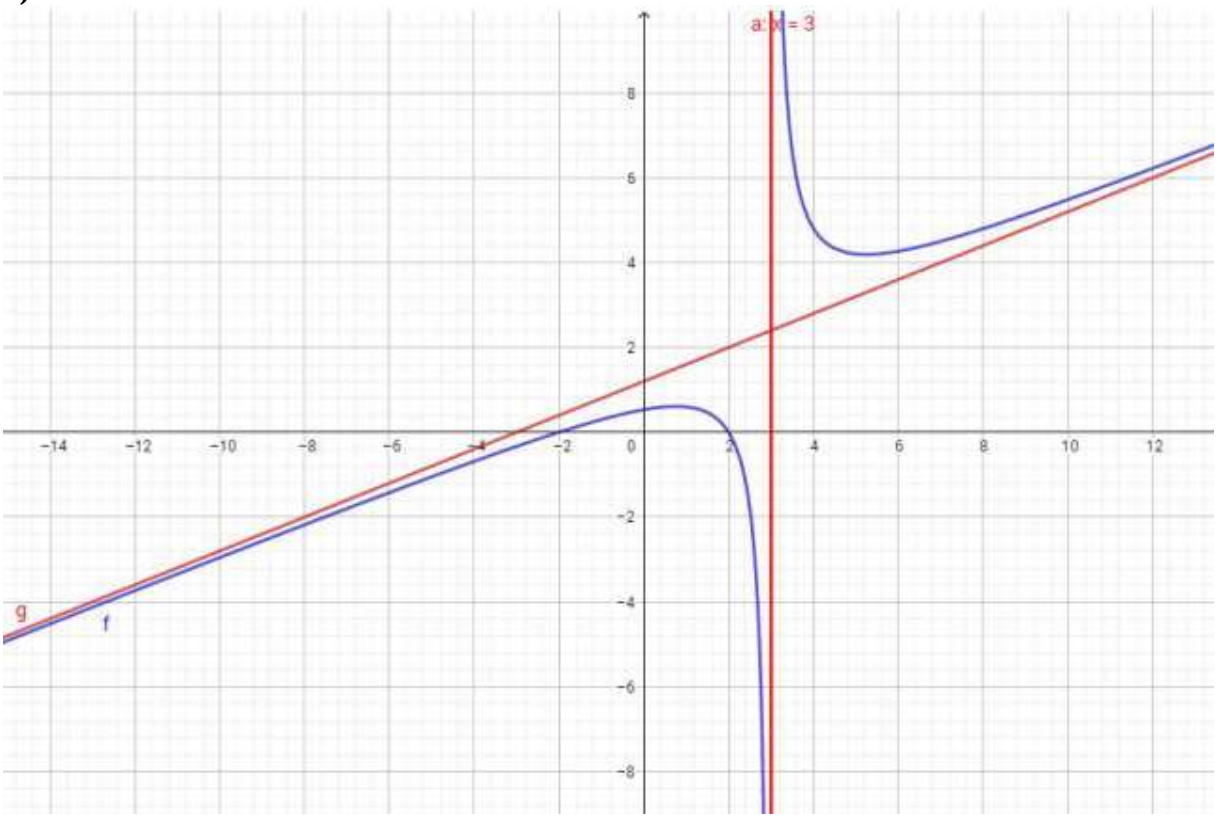
y-Koordinaten: $f\left(3-\sqrt{5}\right) \approx 0{,}61 \Rightarrow HP\left(3-\sqrt{5} / 0{,}61\right)$
$f\left(3+\sqrt{5}\right) \approx 4{,}19 \Rightarrow TP\left(3+\sqrt{5} / 4{,}19\right)$

6) Wendepunkte: notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0 \iff 500(5x - 15)^{-3} = 0$

© Dieter Eiermann 2017-2021

<=> $\frac{500}{(5x-15)^3}=0$. Da in dieser Gleichung nur der Nenner 0 werden könnte, nicht aber der Zähler des Bruches, ist sie nicht lösbar, es gibt also keine Wendepunkte.

7) Skizze:



In der Abbildung sind neben f(x) auch die senkrechte Asymptote bei x = 3 als auch die funktionale Asymptote g(x) = 0,4 x + 1,2 aufgeführt.

10.4 Vollständige Untersuchung einer Exponentialfunktion am Beispiel der e-Funktion

Auch bei der e-Funktion gibt es asymptotisches Verhalten, wie unter 10.1) 3.3 beschrieben wurde.

Beispiel: f(x) = $(2x+1)e^{-0,5x^2+1}$

1) Symmetrie: f(-x) = $(2(-x)+1)e^{-0,5(-x)^2+1}=(-2x+1)e^{-0,5x^2+1}\neq$ f(x) => keine y-Achsensymmetrie.

- f(-x) = $-(-2x+1)e^{-0,5x^2+1}=(2x-1)e^{-0,5x^2+1}\neq$ f(x) => keine Ursprungssymmetrie.

2) Verhalten von f(x) für $x\to\pm\infty$: Hierbei muss berücksichtigt werden, dass eine Exponentialfunktion, deren Basis größer als 1 ist, für betragsmäßig steigendes x immer stärker wächst als jede Potenzfunktion, mit der die Exponentialfunktion etwa multipliziert wird. Würde z.B. bei steigendem x die Potenzfunktion alleine sich gegen Unendlich entwickeln, die Exponentialfunktion dagegen sich der 0 annähern, dann wird das Produkt aus beiden gegen 0 gehen. Aber Achtung: Geht die Potenzfunktion nach $-\infty$ und die Exponentialfunktion nach $+\infty$, dann wird sich das Produkt selbstverständlich in Richtung $-\infty$ bewegen, denn ein Produkt von Faktoren unterschiedlicher Vorzeichen ist negativ!

Es ist daher stets gefährlich, sich Phrasen in der Art „die e-Funktion gewinnt immer" zu merken, besser ist es, in jedem auftretenden Fall das Gehirn einzuschalten!

Für die jetzt untersuchte Funktion bedeutet das:

Für $x \to -\infty$ gilt: da $2x + 1 \to -\infty$ und $e^{-0,5x^2+1} \to 0$ geht f(x) insgesamt gegen 0.
Für $x \to +\infty$ gilt: da $2x + 1 \to +\infty$ und $e^{-0,5x^2+1} \to 0$ geht f(x) insgesamt gegen 0.

Das wiederum bedeutet: in beiden x-Richtungen ist die x-Achse Asymptote von f(x). Außerdem wird aus obigen Zusammenhang klar, dass f(x) sich links von unten und rechts von oben der x-Achse annähert.

3) Nullstellen: $(2x+1)e^{-0,5x^2+1} = 0$ <=> $2x + 1 = 0$ V $e^{-0,5x^2+1} = 0$ => Widerspruch!
<=> $2x + 1 = 0$ <=> $x = -0,5$ => N(-0,5 / 0)

4) Ableitungen: $f(x) = (2x+1)e^{-0,5x^2+1}$ ist ein Produkt und enthält eine Verkettung, wir müssen daher auch Produkt- und Kettenregel anwenden.

$f'(x) = 2\,e^{-0,5x^2+1} + (2x + 1)(-x)\,e^{-0,5x^2+1} = (-2x^2 - x + 2)\,e^{-0,5x^2+1}$
$f''(x) = (-4x - 1)\,e^{-0,5x^2+1} + (-2x^2 - x + 2)(-x)\,e^{-0,5x^2+1} = (2x^3 + x^2 - 6x - 1)\,e^{-0,5x^2+1}$
$f'''(x) = (6x^2 + 2x - 6)\,e^{-0,5x^2+1} + (2x^3 + x^2 - 6x - 1)(-x)\,e^{-0,5x^2+1}$
$= (-2x^4 - x^3 + 12x^2 + 3x - 6)\,e^{-0,5x^2+1}$

5) Extrempunkte: notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$ <=> $(-2x^2 - x + 2)\,e^{-0,5x^2+1} = 0$
<=> $-2x^2 - x + 2 = 0$ V $e^{-0,5x^2+1} = 0$ => Widerspruch!
<=> $x^2 + 0,5x - 1 = 0$
<=> $x_{E1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}+1} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}}$
<=> $x_{E1} \approx -1,28$ V $x_{E2} \approx 0,78$

hinreichende Bedingung : $f'(-1,28) = 0$ und $f''(-1,28) \approx 4,94 > 0$ => TP
$f'(0,78) = 0$ und $f''(0,78) \approx -8,27 < 0$ => HP

y-Koordinaten: $f(-1,28) \approx -1,78$ => TP(-1,28/-1,78)
$f(0,78) \approx 5,13$ => HP(0,78/5,13)

6) Wendepunkte: notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0$ <=> $(2x^3 + x^2 - 6x - 1)\,e^{-0,5x^2+1} = 0$
<=> $2x^3 + x^2 - 6x - 1 = 0$ V $e^{-0,5x^2+1} = 0$ => Widerspruch!
<=> (GTR, z.B. „polyroots(...)") $x_{w1} \approx -1,92$ V $x_{w2} \approx -0,16$ V $x_{w3} \approx 1,59$

hinreichende Bedingung: $f''(-1,92) = 0$ und $f'''(-1,92) \approx 5,3 > 0$ => TP bei $f'(x)$ => WP_1
$f''(-0,16) = 0$ und $f'''(-0,16) \approx -16,5 < 0$ => HP bei $f'(x)$ => WP_2
$f''(1,59) = 0$ und $f'''(1,59) \approx 9,5 > 0$ => TP bei $f'(x)$ => WP_3

y-Koordinaten: $f(-1,92) \approx -1,22$ => $WP_1(-1,92/-1,22)$
$f(-0,16) \approx 1,80$ => $WP_2(-0,16/1,80)$
$f(1,59) \approx 3,22$ => $WP_3(1,59/3,22)$

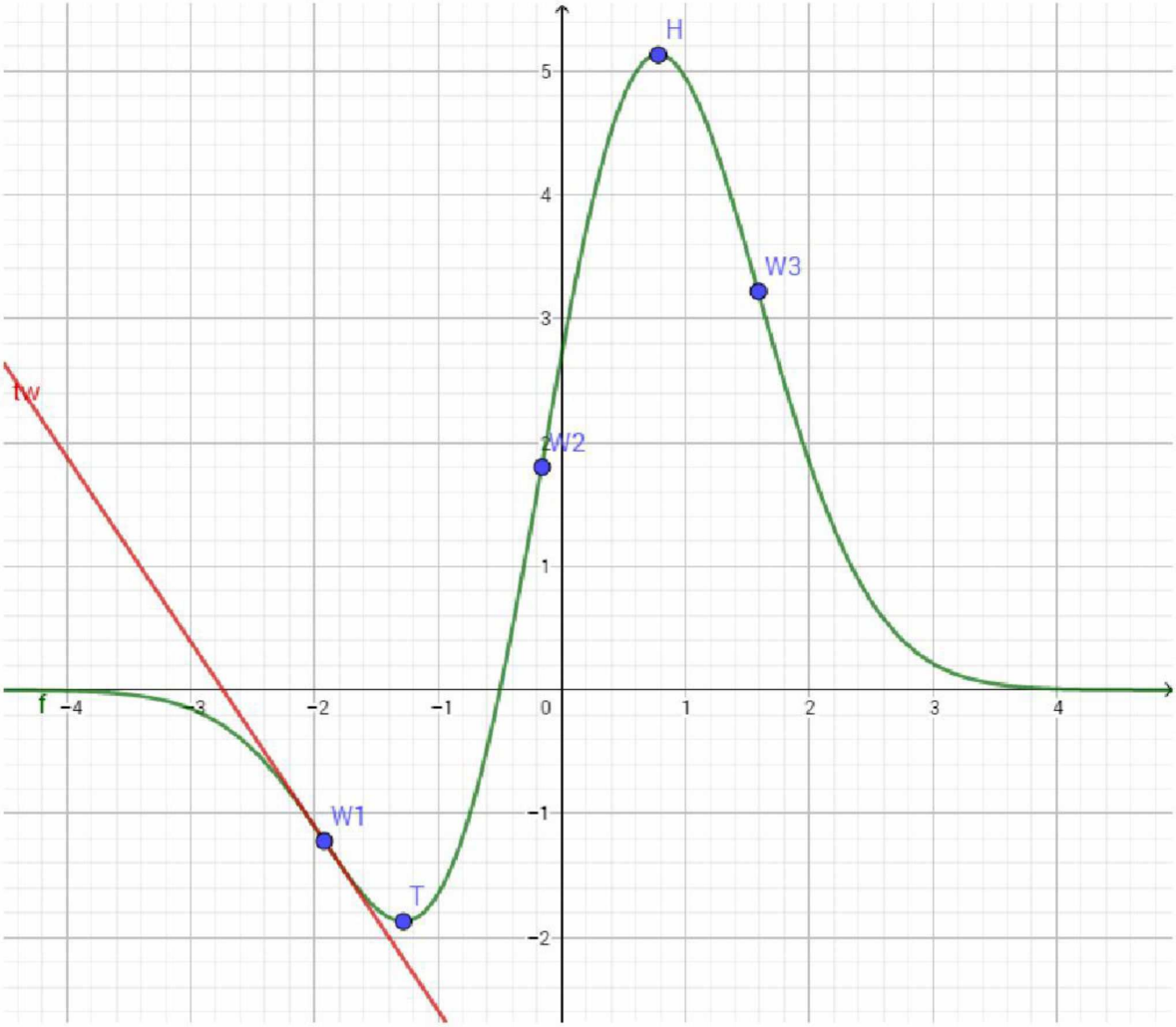
© Dieter Eiermann 2017-2021

Hinweis: Wegen der „krummen“ Werte wurde ab „Extrempunkte“ mit gerundeten Zahlen gerechnet und die Ergebnisse wieder gerundet. Daher ist es möglich, dass ein Nachrechnen leichte Abweichungen in den Ergebnissen zeigt, die aber für eine spätere Skizze so minimal sind, dass sie nicht sichtbar werden.

6.1) Wendetangente am Beispiel WP_1: $t_w(x) = mx + b$, $m = f'(x_w) = f'(-1{,}92) \approx -1{,}49$
zusammen mit $WP_1(-1{,}92/-1{,}22)$ eingesetzt: $-1{,}22 = -1{,}49 \cdot (-1{,}92) + b \iff b \approx -4.08$

$\Rightarrow$ $t_w(x) = -1{,}49\,x - 4{,}08$, für WP_2 und WP_3 ginge die Berechnung entsprechend.

7) Skizze:



<u>10.5 Vollständige Untersuchung einer Logarithmusfunktion am Beispiel der ln-Funktion</u>

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$

1) Symmetrie: $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x)$ => y-Achsensymmetrie

2) Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\ln(x^2+1)) \to +\infty$

© Dieter Eiermann 2017-2021

3) Nullstellen: $\ln(x^2 + 1) = 0 \iff x^2 + 1 = 1 \iff x^2 = 0 \iff x_{1/2} = 0$

4) Ableitungen: $f'(x) = 2x \bullet \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \bullet 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-4x\left(x^2+1\right)^2 - \left(-2x^2+2\right) \bullet 2x \bullet 2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-4x\left(x^2+1\right) - 4x\left(-2x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

5) Extrempunkte: notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0 \iff \frac{2x}{x^2+1} = 0 \iff 2x = 0$
$\iff x_E = 0$

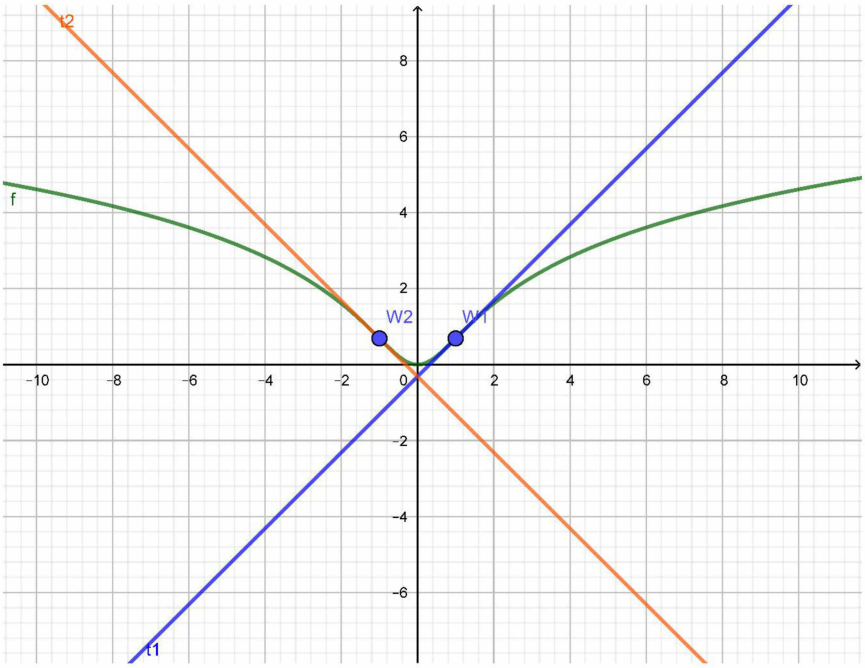
hinreichende Bedingung: $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow TP(0/0)$

6) Wendepunkte: notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0 \iff (...) \iff -2x^2 + 2 = 0$
$\iff x^2 = 1 \iff x_{w1/2} = \pm 1$

hinreichende Bedingung : $f''(\pm 1) = 0$ und $f'''(\pm 1) = \mp 1 \neq 0 \Rightarrow WP$

y-Koordinaten: $f(\pm 1) = \ln(2) \approx 0{,}69 \Rightarrow WP_{1/2}(\pm 1/0{,}69)$

6.1) Wendetangenten: $t_w(x) = mx + b$, $m = f'(\pm 1) = \pm 1$, zusammen mit $WP_{1/2}(\pm 1/0{,}69)$
eingesetzt: $0{,}69 = \pm 1 \bullet (\pm 1) + b \iff b = -0{,}31$

$\Rightarrow t_{w1/2}(x) = \pm x - 0{,}31$

7) Skizze: