

## Lektion 6: Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme, Teil III

Bisher hatten wir lineare Gleichungssysteme mit nur zwei Variablen kennen gelernt, die Lösung solcher Gleichungssysteme entspricht z.B. dem Schnittpunkt von zwei linearen Funktionen, die aber erst in einer späteren Lektion besprochen werden sollen. Auf dem Weg zur Lösung haben wir zwischen drei Lösungsverfahren unterschieden, die zwar alle zum Ziel führen, jedoch nicht alle gleichermaßen praktikabel sind.

Reichen zwei Variablen für den Lösungsansatz zu einem Problem nicht mehr aus, werden also drei oder mehr Variablen benötigt, sind die bisherigen Verfahren unpraktisch. Zum Lösen von Gleichungssystemen aus mehr als zwei Variablen steht ein modifiziertes Additions-/Subtraktionsverfahren zur Verfügung, das **Gauß'sche Eliminationsverfahren** oder kurz: **Gaußverfahren**.

### Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen

Grundsätzlich ist jedes Gleichungssystem eindeutig lösbar, wenn die Anzahl der eingesetzten Variablen und der Gleichungen übereinstimmt. Wie bereits in Teil II beschrieben gibt es jedoch die beiden Ausnahmen der linearen Abhängigkeit von Gleichungen (unterbestimmte Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen) und des Widerspruchs zwischen Gleichungen (unlösbare Gleichungssysteme ohne Lösungen). Im Gegensatz zu nur zwei Gleichungen sind diese Ausnahmen jedoch nicht so leicht zu erkennen, da z.B. eine lineare Abhängigkeit von Gleichungen nun auch zwischen drei oder mehr Gleichungen bestehen kann; d.h. eine Gleichung kann nun auch durch Addition/Subtraktion aus anderen Gleichungen hervorgehen (in Kombination mit vorher noch durchgeführten Äquivalenzumformungen der Gleichungen). Daher zeigen sich die Ausnahmen erst während der Durchführung des Gaußverfahrens, was bei Schülern leicht zu Verwirrungen führen kann.

#### **Grundsätzlich gilt:**

Werden während der Durchführung des Gaußverfahrens in einer Gleichung alle Variablen eliminiert und **es entsteht eine wahre Aussage** („ $0 = 0$ “), dann bestand eine lineare Abhängigkeit zwischen den Gleichungen und das Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen**. Erhält man jedoch einen **Widerspruch** (z.B. „ $5 = 0$ “), ist das Gleichungssystem **unlösbar**.

### **Das Gauß'sche Eliminationsverfahren (Gaußverfahren)**

Bereits vor 30 Jahren gab es programmierbare Taschenrechner bzw. „Pocketcomputer“, die sich mehr oder weniger leicht programmieren ließen. Um jedoch seinem Rechner das Gaußverfahren beizubringen, war schon ein gewisses Geschick erforderlich, außerdem führte die damalige „prähistorische“ Technologie der Geräte bei größeren Gleichungssystemen zu teils unerträglichen Rechenzeiten; damit sind nicht etwa die lächerlichen Unterschiede im „Hochfahren“ heutiger Computer vergleichbar, sondern es konnte sich durchaus um Minuten bis Stunden handeln, ehe das Programm seine Ergebnisse ausspuckte. Man musste also schon mit Variablen und vor allem auch mit der Speichernutzung haushalten lernen, was heutzutage komplett vernachlässigt werden kann – moderne Rechner machen für uns keine zeitlich erkennbare Unterschiede mehr zwischen Gleichungssystemen mit 3 oder mit 30 Variablen, nur dauert natürlich die Eingabe der Parameter (Vorfaktoren der Variablen) entsprechend länger.

Im Anhang wird ein Computerprogramm vorgestellt, das in „Free-Pascal“ geschrieben ist; Free-Pascal ist kostenlos im Internet erhältlich, so dass heute jeder in der Lage ist, z.B. diese Programmiersprache zu lernen und seine eigenen Programme auf dem PC zu entwerfen. Gerade die Umsetzung mathematischer Probleme in ein Computerprogramm führt zu einem

deutlich vertieften Verständnis der Materie, weswegen diese Technik hier Erwähnung finden soll.

Wegen des Computerbezugs wird das Gaußverfahren nunmehr so erläutert, wie es auch programmiert werden sollte. Später wird eine „Von-Hand-Lösung“ etwas anders aussehen, je auch nach den Rechenfähigkeiten des Einzelnen beim Addieren und Subtrahieren von Gleichungen.

Zunächst wird die Variable bestimmt, die sich offensichtlich am leichtesten **aus allen Gleichungen bis auf einer** eliminieren lässt (dem Computer ist das egal, hier nimmt man einfach die erste Variable). Die Gleichung mit dem **betragsmäßig kleinsten Vorfaktor** (dem sogenannten „Pivot“) der gewählten Variable wird nach oben gestellt, mit Hilfe dieser Gleichung soll die Variable aus allen übrigen Gleichungen eliminiert werden. Teile nun diese Gleichung durch den Pivot (sofern dieser nicht bereits 1 ist), **danach wird die Pivotgleichung nicht mehr verändert !** Nenne nun die Pivotgleichung „I“ („römisch 1“), wenn es sich um die erste zu eliminierende Variable handelt (Entsprechend im Folgenden „II“, „III“, usw.). Addiere oder subtrahiere nun diese Gleichung so oft zu/von den anderen Gleichungen, dass die gewählte Variable eliminiert wird.

Verfahre auf gleiche Weise nach und nach auch mit den anderen Variablen, d.h. setze das beschriebene Verfahren für jede Variable einmal um (Setze z.B. die Pivotgleichung für die 2. Variable an 2. Stelle, teile durch den Pivot, nenne sie „II“ und addiere/subtrahiere Vielfache von ihr zu/von den übrigen Gleichungen außer von Gleichung I usw.). **Wichtig, um es noch einmal zu betonen: Ist eine Gleichung einmal als Pivotgleichung mit einer römischen Ziffer benannt und ins Gleichungssystem an die entsprechende Position eingeordnet, wird sie nicht mehr verändert!** Dieses Benennungsverfahren weicht damit, wie auch das in dieser Form beschriebene Gaußverfahren, von der Art ab, wie das Gaußverfahren in den meisten Schulbüchern angewendet wird! Die in den (mir vorliegenden) Schulbüchern beschriebene Durchführung des Gaußverfahrens ist unlogischer und umständlicher!

Ziel der Eliminationsschritte ist es, eine Gleichung mit nur noch einer Variable, eine Gleichung mit zwei Variablen usw. zu erhalten. Dadurch, dass wir die Pivotgleichung vor jedem Schritt jeweils an die nächste obere Position gesetzt haben, erhält die linke Seite des Gleichungssystems die so genannte **Zeilenstufenform**, in der die oberste Gleichung noch alle Variablen enthält und auf dem Weg nach unten die Gleichungen dann jeweils eine Variable verlieren. Es folgt das **aufsteigende Lösen des Gleichungssystems**: Löse die unterste Gleichung, d.h. berechne die erste Variable. Setze die Lösung in die nächsthöhere Gleichung ein und berechne die zweite Variable, setze beide Lösungen wieder in die nächsthöhere Gleichung ein und berechne die dritte Variable usw.

Am Schluss wird dann wieder die Lösungsmenge in der Form:  $IL = \{(x_1; x_2; \dots ; x_n)\}$  angegeben, hier eines Gleichungssystems mit n Variablen und n Gleichungen. Wir nennen ein solches Gleichungssystem, sofern weder eine lineare Abhängigkeit zwischen den Gleichungen noch ein Widerspruch (s.o.) besteht, auch **n-dimensionales Gleichungssystem**.

**Beispiel: Lösung eines 5-dimensionalen Gleichungssystems mit dem Gaußverfahren:**

$$\left| \begin{array}{rcl} 4a - 2b + c - 3d + e & = & -4 \\ a + b - 2c + 4d - 3e & = & -2 \\ 5a + 4b + c - 5d + 2e & = & 6 \\ 2a - 4b - 3c - d + 3e & = & -4 \\ 6a + 5b - 4c + d + e & = & 13 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Beginne mit e, dann steht oben bereits die} \\ \text{Pivotgleichung! Nenne sie daher „I“ .} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{I} \left| \begin{array}{l} 4a - 2b + c - 3d + e = -4 \\ a + b - 2c + 4d - 3e = -2 \\ 5a + 4b + c - 5d + 2e = 6 \\ 2a - 4b - 3c - d + 3e = -4 \\ 6a + 5b - 4c + d + e = 13 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ + 3 \text{ I} \\ - 2 \text{ I} \\ - 3 \text{ I} \\ - \text{ I} \end{array} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\langle \Rightarrow \rangle \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \left| \begin{array}{l} 4a - 2b + c - 3d + e = -4 \\ 13a - 5b + c - 5d = -14 \\ -3a + 8b - c + d = 14 \\ -10a + 2b - 6c + 8d = 8 \\ 2a + 7b - 5c + 4d = 17 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \text{Pivotgleichung f\u00fcr c!} \\ + \text{ II} \\ + 6 \text{ II} \\ + 5 \text{ II} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\langle \Rightarrow \rangle \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \left| \begin{array}{l} 4a - 2b + c - 3d + e = -4 \\ 13a - 5b + c - 5d = -14 \\ 10a + 3b - 4d = 0 \\ 68a - 28b - 22d = -76 \\ 67a - 18b - 21d = -53 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ : 10 \text{ (Pivotgleichung f\u00fcr a!)} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\langle \Rightarrow \rangle \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left| \begin{array}{l} 4a - 2b + c - 3d + e = -4 \\ 13a - 5b + c - 5d = -14 \\ a + 0,3b - 0,4d = 0 \\ 68a - 28b - 22d = -76 \\ 67a - 18b - 21d = -53 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ - 68 \text{ III} \\ - 67 \text{ III} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\langle \Rightarrow \rangle \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left| \begin{array}{l} 4a - 2b + c - 3d + e = -4 \\ 13a - 5b + c - 5d = -14 \\ a + 0,3b - 0,4d = 0 \\ -48,4b + 5,2d = -76 \\ -38,1b + 5,8d = -53 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ : 5,2 \text{ (Pivotgleichung f\u00fcr d!)} \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\langle \Rightarrow \rangle \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \left| \begin{array}{l} 4a - 2b + c - 3d + e = -4 \\ 13a - 5b + c - 5d = -14 \\ a + 0,3b - 0,4d = 0 \\ -121/13b + d = -190/13 \\ -38,1b + 5,8d = -53 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \\ - 5,8 \text{ IV} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\langle \Rightarrow \rangle \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \left| \begin{array}{l} 4a - 2b + c - 3d + e = -4 \\ 13a - 5b + c - 5d = -14 \\ a + 0,3b - 0,4d = 0 \\ -121/13b + d = -190/13 \\ 413/26b = 413/13 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{Zeilenstufenform des Gleichungssystems!} \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

**Aufsteigendes L\u00f6sen:** V:  $413/26b = 413/13 \Leftrightarrow \underline{b = 2}$ ; einsetzen in IV!

IV:  $-121/13 \cdot 2 + d = -190/13 \Leftrightarrow \underline{d = 4}$ ; einsetzen in III!

III:  $a + 0,3 \cdot 2 - 0,4 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{a = 1}$ ; einsetzen in II!

II:  $13 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + c - 5 \cdot 4 = -14 \Leftrightarrow \underline{c = 3}$ ; einsetzen in I!

I:  $4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 - 3 \cdot 4 + e = -4 \Leftrightarrow \underline{e = 5}$ .

L\u00f6sungsmenge:  $IL = \{(1;2;3;4;5)\}$ .

**Hausaufgabe 1. Teil:** Lerne die Vorgehensweise des Gaußverfahrens und vollziehe das berechnete Beispiel nach!

**Anwendung: Aufstellen und Berechnen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als 2 Variablen**

1) Löse das Gleichungssystem und gib die Lösungsmenge an:

$$\begin{cases} 5a - 3b + 7c + 2d = 25 \\ 2a + 10b - c - 4d = -6 \\ -4a - 3b + 5c + d = 57 \\ 8a + b - 4c - 6d = -54 \end{cases}$$

2) Ermittle aus der Aufgabenstellung das Gleichungssystem und berechne es:

Aus Guavensaft, Ananassaft, Kokosmilch und Jamaikarum werden 4 verschiedene exotische Cocktails gemixt. Alle nun folgenden Angaben sind in ml, ermittle aus den Rezepten die Anteile der Zutaten. Für den „Strandzauber“ nimmt man doppelt so viel Guavensaft wie bei der „Inselünde“ und dreimal so viel wie bei der „Palmenbombe“, die wiederum halb so viel enthält wie die 4 Anteile im „Karibikfeuer“. Für letzteres nimmt man einen Anteil Ananassaft, für alle übrigen Cocktails jeweils doppelt so viel. Während die „Inselünde“ lediglich nur einen Spritzer Kokosmilch bekommt, verlangen „Strandzauber“ und „Palmenbombe“ jeweils die dreifache Menge, das „Karibikfeuer“ sogar viermal so viel. Nun zur wichtigsten Zutat, dem echten Jamaikarum, ohne den die Drinks in der Hitze nicht lange genug halten würden: Der „Strandzauber“ bekommt vorsichtige 4 Teile, die „Inselünde“ bereits deren 6, bei der „Palmenbombe“ werden 10 Anteile aufgefüllt und das „Karibikfeuer“ bekommt als annähernd letale Dosis so viel Rum, wie die übrigen Cocktails zusammen. Beachtet man diese Angaben, erhält man 510 ml „Strandzauber“, 350 ml „Inselünde“, 340 ml „Palmenbombe“ und 420 ml „Karibikfeuer“.

**Hausaufgabe 2. Teil:** Berechne die Gleichungssysteme und gib jeweils die Lösungsmenge an! Rechne außerdem die Cocktailaufgabe noch einmal durch!

$$1) \begin{cases} 5o - 7p + 2q = -11 \\ 2o + 3p - 3q = -25 \\ -o - 2p + 4q = 36 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7u - 3v + 2w - 5x = -3 \\ 3u + v - 5w + 2x = 11 \\ 5u - 10v - 6w - 12x = -11 \\ -4u + 4v + 6w + 5x = -1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} a - b + 2c - 4d + e = -24 \\ 4a + 3b + c + 3d - 2e = 24 \\ -3a + b - 3c + d + 5e = -15 \\ 5a + b + c + d - 6e = 28 \\ 2a + 5b - 3c - d + 2e = -6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} g + h + i + j + k + l = 9 \\ 3g - 4h + 2i - 3j + 2k - 4l = -23 \\ -2g - h + 5i - 3j - k + l = -33 \\ 5g + 3h + 7i - j + 4k + 2l = 4 \\ 5g - h + 5i - 6j + 3k - 8l = -30 \\ 4g + 2h + 2i + 5j - 4k - l = 31 \end{cases}$$

**Achtung:** Das im Text angesprochene Pascalprogramm wird später der Lektion als Anhang und mit Erläuterungen beigelegt!