Lektion 4: lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme, Teil I

Eine zentrale Aufgabe der Mathematik ist das Aufstellen und Lösen von Gleichungen. Hier ist die einfachste Form die lineare Gleichung, bei der alle eingesetzten Variablen lediglich in der ersten Potenz verwendet werden. Lässt sich ein Problem nicht durch Einsatz nur einer Variablen beschreiben, wird zur Lösung ein lineares Gleichungssystem benötigt, welches in der Regel nur dann eindeutig lösbar ist, wenn genau so viele Gleichungen zur Verfügung stehen, wie Variablen eingesetzt werden. Der Teilbereich der Mathematik, der sich mit den linearen Gleichungen und –systemen beschäftigt, ist die **lineare Algebra.**

Vorarbeit: Implikation, notwendige und hinreichende Bedingung, Äquivalenz

Bevor wir lernen, wie wir eine Gleichung sinnvoll aufstellen und lösen können, wagen wir einen kurzen Ausflug in die **mathematische Logik** und lernen ein paar wichtige Begriffe und ihre Bedeutung kennen.

Folgt eine Aussage B eindeutig aus einer Aussage A, gilt also: **A => B**, so sprechen wir von einer **Implikation (Schlussfolgerung).** In einer Implikation wird die Aussage A, aus der die Implikation gezogen wird, **hinreichende Bedingung** der Implikation genannt, die implizierte Aussage B heißt **notwendige Bedingung** der Implikation.

Beispiel:

A = „Eine Zahl ist durch 9 teilbar."
B = „Eine Zahl ist durch 3 teilbar."

Wir können die Implikation A => B aufstellen, wie unschwer zu erkennen ist, denn jede durch 9 teilbare Zahl ist auch durch 3 teilbar, also folgt die Teilbarkeit durch 3 aus der Teilbarkeit durch 9. Weil das so ist, reicht die Aussage „eine Zahl ist durch 9 teilbar" offenbar aus, um die Aussage „eine Zahl ist durch 3 teilbar" schlussfolgern zu können, Aussage A ist demnach für Aussage B eine **hinreichende Bedingung**. Sie ist jedoch **nicht notwendig**, denn eine Zahl **muss ja nicht** durch 9 teilbar sein, um auch durch 3 teilbar sein zu können, wie z.B. die 6.
Umgekehrt gibt es keine durch 9 teilbare Zahl, die nicht auch durch 3 teilbar ist; die Teilbarkeit durch 3 ist eine Vorraussetzung dafür, dass ein Zahl auch durch 9 teilbar sein kann, sie **muss** durch 3 teilbar sein. Daher ist die Aussage B für die Aussage A eine **notwendige Bedingung**. Sie ist jedoch **nicht hinreichend**, da es ja durch 3 teilbare Zahlen gibt, die nicht durch 9 teilbar sind!

Diese Erläuterungen sollen der üblichen etwas schlampigen Verwendung des Schlussfolgerungspfeils vorbeugen helfen! Bedenke: wenn der „daraus folgt" – Pfeil benutzt wird (=>), gilt immer der Zusammenhang zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung; falls dieser nicht gilt, darf auch der Pfeil so nicht verwendet werden!

Wenn eine Implikation „in beiden Richtungen" gilt, sprechen wir von einer **Äquivalenz.** Die Schreibweise A <=> B („A ist äquivalent zu B") bedeutet: „B gilt genau dann, wenn A gilt und A gilt auch genau dann, wenn B gilt". Mit den oben beschriebenen Erkenntnissen heißt das nun auch, dass sowohl A hinreichende Bedingung für B ist und B notwendige Bedingung für A als auch, dass B hinreichende Bedingung für A ist und A notwendige Bedingung für B.

Eine Äquivalenz ist demnach immer in beiden Richtungen in eindeutiger Weise nachvollziehbar. Falls nicht, liegt auch keine Äquivalenz vor.

Aufstellen einer Gleichung aus einer Problemstellung heraus

Erfahrungsgemäß ist die Bearbeitung einer Problemstellung in Textform, die sogenannte „Textaufgabe“, genau das, was die meisten Schüler verabscheuen. Vielleicht liegt das daran, dass das junge Gehirn immer viele andere interessante Eindrücke zu verarbeiten hat und daher die Anstrengung scheut, sich auf eine nebensächliche Matheaufgabe zu konzentrieren.
Daher lautet die erste Grundregel, um an eine Problemstellung sinnvoll herantreten zu können: **Ausblenden aller anderen Eindrücke und volle Konzentration auf die Aufgabenstellung!** Niemand kann erwarten, ein Problem zu verstehen, wenn im Hintergrund Radio, Fernsehen und Handy dudeln, der Blick stets bewundernd aus dem Fenster gleitet oder hübsche körperliche Merkmale der Mitschüler und Mitschülerinnen sucht!
Wenn wir also nun in der vollen Absicht, ein Problem lösen zu wollen, in vollster Konzentration und unter Abstellen jeglicher Ablenkung uns dem Text zuwenden, gehen wir wie folgt vor:

- Welchem Sachverhalt weisen wir die Variable, z.B. „x“, zu? Notiere die Entscheidung!
- Benötigen wir weitere Variablen? Wenn ja, für welchen Sachverhalt welche Variable? Notiere auch diese Entscheidungen!
- Welche Zusammenhänge werden in Bezug zur gewählten Variable im Text beschrieben? Notiere die Zusammenhänge!
- Erkenne nun die geschilderten Gleichheiten, das heißt: verknüpfe die Zusammenhänge, die sich entsprechen, in Form einer Gleichung.
- Bedenke: für jede gewählte Variable wird eine solche Gleichung benötigt! Können nicht genügend Gleichungen gefunden werden, so liegt das meistens auch daran, dass zu viele Variablen eingesetzt wurden!

Lösen einer Gleichung als Lösung der vorangegangenen Problemstellung

Das oben geschilderte Problem, eine Gleichung aus einem Text heraus zu lesen, ist die erste und für die meisten schwierigste Hürde auf dem Weg zur Lösung. Hat man nun diese Gleichung erst gefunden, stellt sich die Frage: „Wie finde ich heraus, was ich für die Variable einsetzen muss, damit die Gleichung erfüllt wird?“
In unseren mathematischen Anfängen sind wir an solche Aufgaben häufig durch Raten herangetreten, viele Schüler haben diese Gewohnheit nie so ganz aufgegeben (was sich in einem kontinuierlichen Absinken der Noten belegen lässt). **„Raten“ ist in der Mathematik grundsätzlich der falsche Weg! Wir lernen Methoden kennen, um Probleme durch gezielte Rechnung lösen zu können!**

„Lösen“ einer Gleichung bedeutet nichts anderes, als die Variable auf eine Seite der Gleichung „frei zu stellen“, d.h. nach erfolgreicher Bearbeitung einer Gleichung steht die Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens alleine.
Um diese Aufgabe zu erfüllen, müssen alle Zahlen, die um die Variable herum durch verschiedene Rechenarten gruppiert sind, „weggerechnet“ werden. **Dabei sind folgende Regeln zu beachten:**

- Grundsätzlich dürfen bedenkenlos die sogenannten **„Äquivalenzumformungen“** eingesetzt werden, das sind die Rechenarten „plus“, „minus“, „mal“ und „geteilt durch“. Inwieweit sich mit diesen Rechnungen die oben geschilderten Äquivalenzen ergeben, wird im Folgenden noch gezeigt werden.

- **Jede eingesetzte Rechnung ist stets unter Beachtung aller Rechengesetze (vgl. Lektion 1) auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens identisch durchzuführen!** Bedenke: wenn eine Gleichheit gilt, kann ich ja nicht plötzlich auf einer Seite etwas verändern und annehmen, dass die Gleichheit immer noch gilt – das sagt einem ja schon der gesunde Menschenverstand! Es ist jedoch immer wieder erstaunlich, wie dieser Verstand abgestellt wird, wenn es sich um das Lösen einer Matheaufgabe handelt. Nehmen wir ein simples Beispiel einer Gleichung ohne Variable: 3 + 5 = 8. Wenn mich links die 3 stört, könnte ich ja – 3 rechnen, aber bitte auf beiden Seiten; oder macht etwa 5 = 8 noch Sinn? Natürlich nicht! Seltsam, dass das beim Einsatz von Variablen plötzlich anders sein soll...

- Bringe nun durch Rechnung alle Variablenterme auf eine Seite der Gleichung und alle Zahlen auf die andere Seite. Erkenne dabei, durch welche Rechenart die jeweiligen Zahlen und Terme miteinander verknüpft sind und rechne, um sie von der Seite der Gleichung zu entfernen, **das genaue Gegenteil.**

- Erkenne, durch welche Rechenart noch störende Zahlen mit der Variablen verknüpft sind und führe auch hier die genau entgegengesetzte Rechnung durch.

- Zum besseren Verständnis des Lösungsweges ist es empfehlenswert, jede Rechnung durch einen Querstrich („/“) getrennt hinter die Gleichung zu schreiben. Außerdem wird gerne gesehen, dass nach erfolgter Rechnung vor die so umgewandelte Gleichung der Äquivalenzpfeil („<=>“) gesetzt wird, **natürlich nur, wenn tatsächlich eine Äquivalenzumformung durchgeführt worden ist (s.u.).**

Beispiel für das Lösen einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen:

	$3x - 7 + 5x + 10 = 4x + 1 - 7x + 9$	/ fasse zusammen
<=>	$8x + 3 = -3x + 10$	/ -3
<=>	$8x = -3x + 7$	/ + 3x
<=>	$11x = 7$	/ : 11
<=>	$x = \frac{7}{11}$	

Nun kann die Lösung noch in Form einer Lösungsmenge angegeben werden, wenn die Aufgabe ausdrücklich deren Angabe verlangt: $\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{11}\right\}$.

Wurde in der (Text-) Aufgabe eine Frage gestellt? Dann ist diese natürlich noch durch einen Antwortsatz zu beantworten, z.B.: „Der Anteil der durch Chips zugeführten Kalorienmenge beträgt $\frac{7}{11}$ der heutigen Tagesmenge an Kalorien.“

Warum handelt es sich im obigen Lösungsweg tatsächlich jeweils um Äquivalenzen?

Sehr leicht lässt sich erkennen, dass jede Gleichung sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingung der vorangehenden bzw. nachfolgenden Gleichung ist.

Beispiel: $x = \frac{7}{11}$ ist notwendig dafür, dass 11x = 7 gelten kann und 11x = 7 ist hinreichend für die Lösung $x = \frac{7}{11}$, also gilt die Implikation: $11x = 7 \;\Rightarrow\; x = \frac{7}{11}$.

Umgekehrt ist 11x = 7 auch notwendig dafür, dass $x = \frac{7}{11}$ gelten kann und $x = \frac{7}{11}$ ist hinreichend für die Gleichung 11x = 7, daher gilt auch die Implikation: $x = \frac{7}{11} \;\Rightarrow\; 11x = 7$.

Die Implikation gilt in beiden Richtungen, also liegt eine Äquivalenz vor!

Selbstverständlich wären hierfür auch unendlich viele andere Formulierungen der Gleichung möglich gewesen, aber eben nur, wenn deren Erstellung durch die genannten Äquivalenzumformungen der Gleichung erfolgt ist. Wir haben hier aber nur die Umformungen eingesetzt, die einen Sinn auf dem Weg zur Lösung der Gleichung machen!

Wie sähe eine nicht-äquivalente Umformung aus?

Betrachten wir die simple nicht-lineare Gleichung $x^2 = 4$. Wir könnten durch Ziehen der Quadratwurzel eine Lösung erhalten, dann würde eine mögliche Lösung lauten: x = 2. Nun gibt es jedoch die weitere Lösung $x_2 = -2$, wie ist das also zu notieren?

Keinesfalls ist x = 2 notwendig dafür, dass $x^2 = 4$ gelten kann, da diese Gleichung ja auch durch $x_2 = -2$ erfüllt wird. Daher wäre die Schreibweise „$x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = 2$" schon einmal **falsch**, denn es handelt sich nicht um eine gültige Implikation! Umgekehrt ist jedoch $x^2 = 4$ notwendig dafür, dass x = 2 gelten kann, außerdem ist x = 2 hinreichend für $x^2 = 4$ (wohlgemerkt: „hinreichend", nicht „notwendig"); es gilt also die Implikation:

$x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 4$.

Das bedeutet: würde eine Aufgabe verlangen, die beiden Aussagen „$x^2 = 4$" „x = 2" miteinander in dieser Reihenfolge durch das korrekte Zeichen zu verknüpfen, so müsste geschrieben werden: $x^2 = 4 \;\Leftarrow\; x = 2$.

Seltsam? Vielleicht, aber so verlangt es die mathematische Logik!

Wird übrigens die Lösung der Gleichung $x^2 = 4$ verlangt, so sähe der korrekte Weg so aus:

$x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$ mit der Lösungsmenge IL = {-2 ; 2}.

Hausaufgabe 1. Teil: Lerne die Bedeutung der Begriffe „Implikation, notwendige und hinreichende Bedingung und Äquivalenz"!

Hausaufgabe 2. Teil: Lerne die Vorgehensweise beim Ermitteln einer Gleichung aus einer Textaufgabe und beim Lösen einer Gleichung, wende diese Vorgehensweise bei den folgenden Aufgaben an!

Anwendung: Aufstellen und Berechnen von Gleichungen

gemeinsame Arbeit:

1) Löse die Gleichung und gib die Lösungsmenge an:
   $(10 - 3a + 8 - 4a) \cdot 4 = -3 \cdot (5a + 2 + 10a - 4)$

2) Julia, Karin, Paul, Fritz und Peter nehmen an einem Börsenspiel teil. Nach 3 Monaten verkündet Paul das Ergebnis wie folgt: die Jungs haben zusammen 800000 € Gewinn erwirtschaftet. Julia hat 4 mal so viel verdient wie Karin, die wiederum halb so viel wie Paul kassiert hat. Fritz hat drei mal so viel wie Peter gewonnen, der nur halb so viel Gewinn geschafft hat wie Karin. Welche Gewinne gab es bei dem Börsenspiel?

Hausaufgabe 3. Teil: Löse die Aufgaben:

1) Löse die Gleichungen und gib die Lösungsmenge an:

a) $4x - 10 = 10x - 4$ b) $3 \cdot (5z - 12) + 8z + 4 = (4 - 2z) \cdot 5 - 6z + 8$
c) $9a + 25 = 8 - 4a \cdot 3 - (5a + 1)$

2) Ein Weitspringer stellt eine neue persönliche Bestleistung auf. Anschließend gelingt ihm beim Kugelstoßen die 1,5 fache Weite seines Sprungs, den Schlagball wirft er sogar 4 mal so weit, wie er die Kugel gestoßen hat. Den Speer dagegen schleudert er nur doppelt so weit, wie die Kugel – das ist einfach nicht seine Disziplin! Wenn er die Weite seines Speerwurfes von den übrigen Distanzen abzieht, kommt er auf eine Strecke von 38,5 m. Berechne alle Weiten!

3) Wenn ich zum 6 fachen einer Zahl 5 hinzurechne und das Ergebnis verdopple, erhalte ich das dreifache der Differenz aus dem doppelten der Zahl und 4. Welche Zahl meine ich?

4) Sind die beiden Aussagen äquivalent?
A: „Die Zahl ist eine Primzahl"
B: „Die Zahl ist nur durch 1 und durch sich selbst teilbar"