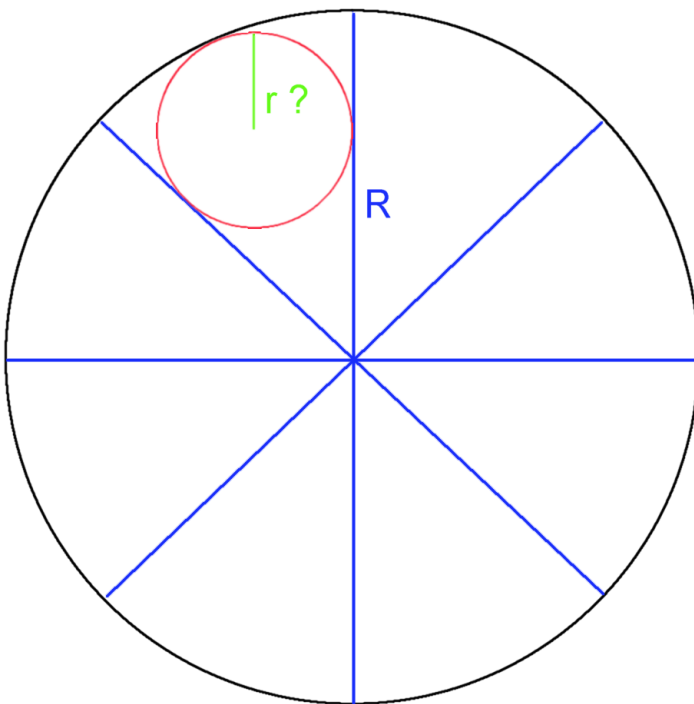


„Kleiner Kreis im großen Kreis“

Vor ein paar Tagen wurde ein nettes kleines mathematisches Problem an mich herangetragen, das mich aus zwei Gründen interessierte: Zum Einen musste ich feststellen, dass bereits der Genuss des ersten Glases (zugegebenermaßen recht kräftiger) Erdbeerbowl eine spontanen Lösung der Aufgabe nicht eben förderlich war, zum Anderen wurde die das Problem aufwerfende eigentliche Frage durch ein gerade einmal 11 Jahre (!) altes Mädchen gestellt und durch eine Bekannte an mich weiter gegeben.

Die Frage lautet: *Wird ein Kreis durch 4 Schnitte (Durchmesser) in gleich große Achtelkreise unterteilt und man möchte in ein solches Achtel einen kleinen Kreis so einzeichnen, dass er sowohl den Kreisrand des großen Kreises als auch die beiden Durchmesserlinien des Achtels berührt, wie kann man dann den Radius des kleinen Kreises berechnen?*



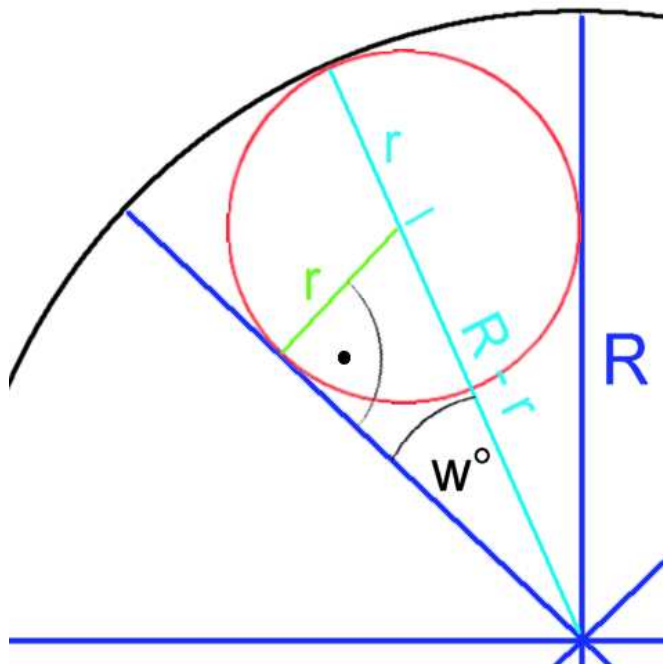
Die nebenstehende Abbildung macht das Problem anschaulich.

Nach eingehender (nüchterner) Überlegung musste ich feststellen, dass die Lösung in der Anwendung der guten alten Trigonometrie zu suchen ist, wie ich im Folgenden zeigen werde.

Außerdem werde ich das Problem auf eine beliebige Unterteilung des Kreises in n gleich große Teilkreise verallgemeinern.

Verallgemeinerung des Problems: *Wird ein Kreis durch Einzeichnen von Radien in n gleich große Teilkreise (Kreisausschnitte) unterteilt und es soll in einen solchen Teilkreis ein kleiner Kreis eingezeichnet werden, der sowohl den Kreisrand des großen Kreises als auch die beiden Radiuslinien des Teilkreises berührt, wie kann dann der Radius dieses kleinen Kreises berechnet werden?*

Zur Verdeutlichung folgt eine Ausschnittsvergrößerung:



Wird der Kreisabschnitt durch einen weiteren Radius halbiert, so geht dieser (hellblaue) Radius durch den Mittelpunkt des kleinen Kreises; R wird also durch den Mittelpunkt in r und $R - r$ unterteilt.

Weil der kleine Kreis die beiden seitlichen Radien **berührt**, sind diese **Tangenten an den kleinen Kreis** und haben als solche die Eigenschaft, **senkrecht zum Radius r dieses Kreises zu stehen** (Beweis?) !

Wir erkennen ein freundliches kleines rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel w° , einer diesem Winkel gegenüberliegenden Gegenkathete r und einer

Hypotenuse $R - r$! Daher gilt der Sinus :

$$\sin(w^\circ) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{r}{R-r}.$$

Für den Winkel w° dieses Dreiecks wiederum gilt: Es handelt sich um die Hälfte des Winkels des Kreisabschnitts, dieser richtet sich wiederum nach der Anzahl n der Kreisabschnitte, in die der ursprüngliche Kreis mit Radius R unterteilt wurde.

$$w^\circ = \frac{1}{2} \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}. \text{ Also gilt:}$$

$$\begin{aligned} \sin(w^\circ) &= \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{r}{R-r} && \Leftrightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot (R-r) = r \\ &&& \Leftrightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot R - \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r = r \\ &&& \Leftrightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot R = \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r + r \\ &&& \Leftrightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot R = \left(\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) + 1\right) \cdot r \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot R}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) + 1}$$

Berechnung des Ausgangsproblems als Beispiel:

Wir unterteilen den Ausgangskreis mit Radius R in 8 gleich große Teilkreise. Für den Radius des kleinen Kreises gilt also:

$$r = \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{8}\right) \cdot R}{\sin\left(\frac{180^\circ}{8}\right) + 1} = \frac{\sin(22,5^\circ) \cdot R}{\sin(22,5^\circ) + 1} .$$

Ist der Radius R des Ausgangskreises z.B. 4 cm, so ist r des kleinen Kreises demnach:

$$r = \frac{\sin(22,5^\circ) \cdot 4\text{cm}}{\sin(22,5^\circ) + 1} = 1,107 \text{ cm} .$$

Die Unterteilung n kann eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 sein!

Für $n = 1$ gibt es logischerweise keine Unterteilung und es kann auch kein kleiner Kreis unter den vorausgesetzten Bedingungen eingezeichnet werden.

Für $n = 2$ haben wir den Kreis in 2 Halbkreise unterteilt; es können zwei kleine Kreise eingezeichnet werden, von denen jeder den halben Radius des Ausgangskreises hat:

$$r = \frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{2}\right) \cdot R}{\sin\left(\frac{180^\circ}{2}\right) + 1} = \frac{\sin(90^\circ) \cdot R}{\sin(90^\circ) + 1} = \frac{1 \cdot R}{1 + 1} = \frac{1}{2} R .$$

Bemerkung: Vermutlich hat das 11 Jahre alte Mädchen noch nie etwas von einem „Sinus“ gehört. Aber das sollte nicht davon abschrecken, auf eine derartig intelligente Frage auch eine mathematisch fundierte Antwort zu geben. Und die Trigonometrie, die ja nur den einfachen Zusammenhang der Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den übrigen Winkeln in diesem Dreieck wiedergibt, ist schnell erklärt!